以再生核質點法分析淺水波方程式

孫健庭　　關百宸[1]　　施文凱

國立臺灣海洋大學　系統工程暨造船學系

關鍵詞：淺水波方程式，無網格法，再生核質點法，高階近似方法

摘要

本研究已於海洋學刊發表[25]，以再生核質點法(Reproducing Kernel Particle Method, RKPM)模擬淺水波方程式。使用上游法的再生核質點法去模擬經分離係數矩陣法處理過的淺水波方程式的空間離散部分，將淺水波方程式的波傳方向依據特徵速度區分成向前與向後的波，再以上游法將 RKPM 的形函數分成上下游分別近似不同方向的波。時間離散部分則是使用二階 Runge-Kutta 法。為了驗證本方法的可用性，兩個算例包含一維開放渠道的穩定流通過底床突起圓丘以及二維的斜向水躍。另外也發現底床之幾何形狀不平滑會影響數值收斂結果。經過驗證，使用再生核質點法能夠以高收斂性以及精度有效的模擬淺水波問題，即使使用非均勻網格，仍然可以保持近似的階數和精確度。

前言

淺水波方程式(Shallow water equations, SWEs)是一組雙曲線型一階非線性偏微分方程式，通常適用於模擬如沿海地區或內陸地區的河流、潮汐以及波浪等大型水力問題。對於這些具有自由液面，且重力方向的影響與其他方向的影響相比之下非常小的問題，並不是求解較複雜的 Navier-Stokes 方程式，而是通過對深度方向積分 Navier-Stokes 方程式得出的淺水波方程式適用於這些問題。

許多數值方法已被用來應用在解淺水波方程式，例如：有限差分法(Finite Difference Method, FDM)已被應用於水力模擬[1, 2]。以有限體積法(Finite Volume Method, FVM)模擬複雜的非穩定流現象也有了顯著的發展[3, 4]。有限元素法(Finite Element Method, FEM)同樣也廣泛的被用來模擬淺水波方程式[5, 6]。然而，前面提到的基於網格法的數值方法，通常會在建立網格與節點對節點的連接上遇到困難，特別是遇到複雜幾何形狀的時候。甚至這些網格法的性能很大程度取決於網格的質量。

在過去的幾十年裡，諸如光滑粒子流體動力學法(SPH) [7, 8]、擴散元素法(DEM) [9]、無元素伽勒金法[10]、以及再生核質點法(RKPM) [11, 12]等等無網格法，逐漸發展成熟並廣泛的應用在工程問題上，這些方法不需要進行網格生成也能夠達到高階近似。無網格法同樣也能求解淺水波方程式，如 SPH[13, 14]、有限質點法[15]、徑向基底函數配點法(RBF) [16]、自然單元法[17, 18]、以及無元素伽勒金法[18]。

本文的大綱如下：第二段包含 RKPM 的基本理論和淺水波問題的控制方程式。第三段為數值處理的方法，包含上游法、Full Transformation、Runge-Kutta 時間積分法。第四章中的兩個數值算例驗證了本研究方法之性能，最後根據數值結果提出結論和討論，並於 2018 年海洋學刊 Journal of Marine Science and Technology 進行發表[25]。

基本理論

1. 再生核質點法

假設任意函數 $f(x)$，其數值近似 $f^h(x)$ 可表示為[12]

$$f^h(x) = \sum_I \Psi_a(x; x - x_I)\tilde{f}_I \tag{1}$$

其中 Ψ_a 是 RK 形函數，I 是第 I 個質點。RK 形函數可表示為

$$\Psi_a = C(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)\phi_a(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \tag{2}$$

其中 $C(x - x_I)$ 為修正方程，$\phi_a(x - x_I)$ 為核函數。本研究中核函數使用的是 B-spline 函數[19]。修正方程為一組多項式方程，可表示為

$$C(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = \mathbf{B}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}(0) \tag{3}$$

其中

[1] 關百宸（paichen@ntou.edu.tw.tw）

$$\mathbf{B}^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I) = \begin{bmatrix} 1 & x^\beta - x_I^\beta & \left(x^\beta - x_I^\beta\right)^2 & \cdots \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\mathbf{M} = \sum_I \mathbf{B}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)\mathbf{B}^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)\phi_a(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I) \tag{5}$$

將方程式(3)代入(2)可得到 RK 形函數如下

$$\Psi_a = \mathbf{B}^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}(0)\phi_a(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I) \tag{6}$$

核函數控制 RK 近似方法的連續性和平滑性，影響域決定了 RK 質點的影響區域，也就是說，影響域越大會使越多質點參與到局部近似。圖 1 為一階的 RK 形函數。

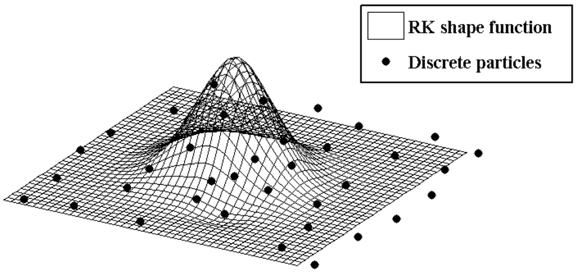

圖 1 一階 RK 形函數

2. 再生核質點法的類微分方程

在本研究中，加入了類微分到導數場近似中[20]。這個方法可以避免計算式(6)中的每一項的微分，提高建立形函數的效率。我們假設套用類微分時可將導數表示為

$$\partial f(\mathbf{x})/\partial x^\alpha = \sum_I \tilde{\Psi}_I^\alpha \tilde{f}_I \tag{7}$$

其中 $\tilde{\Psi}_a$ 為形函數的微分，並且可表示為

$$\tilde{\Psi}_I^\alpha = C^\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)\phi_a(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I) \tag{8}$$

指數的 $\alpha = 1, 2, 3$ 分別代表 x, y, z 三個維度。整理過後形函數的微分可表示為

$$\tilde{\Psi}_I^\alpha = \mathbf{B}^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)\mathbf{M}^{-1}\,\partial\mathbf{B}/\partial x^\alpha\,(0)\phi_a(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I) \tag{9}$$

圖 2 為形函數的一階微分。

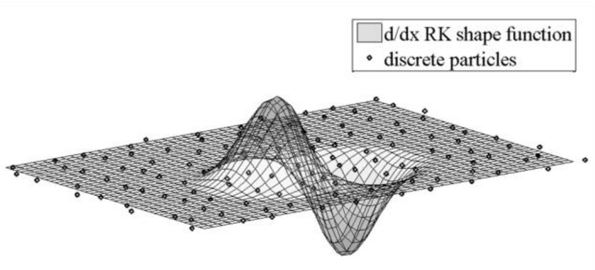

圖 2 RK 形函數的一階類微分圖

3. 淺水波方程式

淺水波方程式(Shallow water equations, SWEs)由 Navier-Stokes 方程式在忽略了垂直加速度以及假設為壓力為靜水壓分布後，對垂直方向(z 軸)積分而來。淺水波方程式包含了質量守恆方程式：

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\left(\frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y}\right) \tag{10}$$

以及動量守恆方程式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{\partial h}{\partial x} &= F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + g\frac{\partial h}{\partial y} &= F_y \end{aligned} \tag{11}$$

其中 h, u,和 v 分別代表水深和 x 與 y 方向的平均流速。在不可壓縮流的假設下，外力 F_x 和 F_y 可表示為：

$$\begin{aligned} F_x &= gSo_x - gSf_x + C_f v \\ F_y &= gSo_y - gSf_y + C_f u \end{aligned} \tag{12}$$

其中 g 和 C_f 分別為重力加速度和柯氏力係數。So 表示底床坡度、 Sf 表示底床摩擦，分別可表示為：

$$\begin{aligned} Sf_x &= n^2 h^{-4/3} u\sqrt{u^2+v^2} \\ Sf_y &= n^2 h^{-4/3} v\sqrt{u^2+v^2} \end{aligned} \tag{13}$$

其中 n 為曼寧粗糙係數。淺水波方程式的非保守形式可表示為[21]：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{F} \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} h \\ u \\ v \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} u & h & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}; \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} v & 0 & h \\ 0 & v & 0 \\ g & 0 & v \end{bmatrix}; \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{15}$$

將式(1)代入到水深和速度項後可得到淺水波方程式的離散形式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}_I}{\partial t} &= \mathbf{F}_I - \mathbf{A}_I \sum_J^{NP} \frac{\partial \Psi_J}{\partial x}\tilde{\mathbf{U}}_J \\ &- \mathbf{B}_I \sum_J^{NP} \frac{\partial \Psi_J}{\partial y}\tilde{\mathbf{U}}_J \end{aligned} \tag{16}$$

其中 I 和 J 分別代表第 I 個質點和第 J 個質點。NP 代表參與到第 I 個質點的 RK 離散近似的總點數。

數值處理

1. RK 形函數套用上游法

在本研究中，使用分離係數矩陣法[1]來求出淺水波控制方程式的特徵，利用這些特徵便能套用上游法的框架，並模擬不同方向的波傳。

分離係數矩陣法將式(14)的係數矩陣 **A** 和 **B** 對角線化後取得淺水波方程式的特徵線，矩陣 **A** 的特徵值為 u , $u+c$ 和 $u-c$，矩陣 **B** 的特徵值為 v , $v+c$ 和 $v-c$，因此矩陣 **A** 和矩陣 **B** 可表示為

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_I &= \mathbf{P}_I^A \mathbf{D}_I^A \left(\mathbf{P}_I^A\right)^{-1} \\ \mathbf{B}_I &= \mathbf{P}_I^B \mathbf{D}_I^B \left(\mathbf{P}_I^B\right)^{-1} \end{aligned} \tag{17}$$

其中 **P** 為特徵向量矩陣，**D** 為包含特徵值的對角矩陣。特徵值的符號代表波傳方向，根據波傳方向，特徵值矩陣 **D** 可再分為 $\mathbf{D}^+$和 $\mathbf{D}^-$ 並表示如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_I^+ &= \mathbf{P}_I \mathbf{D}_I^{A+} \mathbf{P}_I^A \\ \mathbf{A}_I^- &= \mathbf{P}_I^A \mathbf{D}_I^{A-} \mathbf{P}_I^A \\ \mathbf{B}_I^+ &= \mathbf{P}_I^B \mathbf{D}_I^{B+} \mathbf{P}_I^B \\ \mathbf{B}_I^- &= \mathbf{P}_I^B \mathbf{D}_I^{B-} \mathbf{P}_I^B \end{aligned} \tag{18}$$

將式(18)代入式(16)的控制方程式可表示成：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}_I}{\partial t} = \mathbf{F}_I - \mathbf{A}_I^+ \sum_J^{NP} \frac{\partial \Psi_J^+}{\partial x} \tilde{\mathbf{U}}_J - \mathbf{A}_I^- \sum_J^{NP} \frac{\partial \Psi_J^-}{\partial x} \tilde{\mathbf{U}}_J \\ - \mathbf{B}_I^+ \sum_J^{NP} \frac{\partial \Psi_J^+}{\partial y} \tilde{\mathbf{U}}_J - \mathbf{B}_I^- \sum_J^{NP} \frac{\partial \Psi_j^-}{\partial y} \tilde{\mathbf{U}}_J \end{aligned} \tag{19}$$

其中 $\Psi,_i^{\pm}$ 為 RK 形函數在 i 方向波傳的正(或負)方向上的導數，因此在做 RK 近似時，我們應該分別調整上游和下游的影響域大小。在模擬正向波傳時，只能使用上游的質點來近似。相反的，在模擬負向波傳時，只有下游的質點能參與近似。圖 3 顯示了原始形函數在正和負方向的導數，和 RK 離散點。

2. Full Transformation

在 RK 近似中，當形函數的影響域增加時，形函數會趨向平滑，如圖 4 所示，但這種行為會使 RK 形函數失去 Kronecker delta 的特性，這樣會使得式(1)的節點係數不會完全等於質點位置上的物理量。為了解決這個問題，提出 Full Transformation Method 將方程式的節點向量轉換成物理量[22]，方程式如下所示：

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_1 \\ \tilde{\mathbf{U}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{U}}_{NP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \cdots & \Phi_{1NP} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & & \Phi_{2NP} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Phi_{NP1} & \Phi_{NP2} & \cdots & \Phi_{NPNP} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_{NP} \end{bmatrix} \tag{20}$$

其中

$$\Phi_{IJ} = \begin{bmatrix} \Psi_a(\xi_I;\xi_I-\xi_J) \\ \Psi_a(\xi_I;\xi_I-\xi_J) \\ \Psi_a(\xi_I;\xi_I-\xi_J) \end{bmatrix} \tag{21}$$

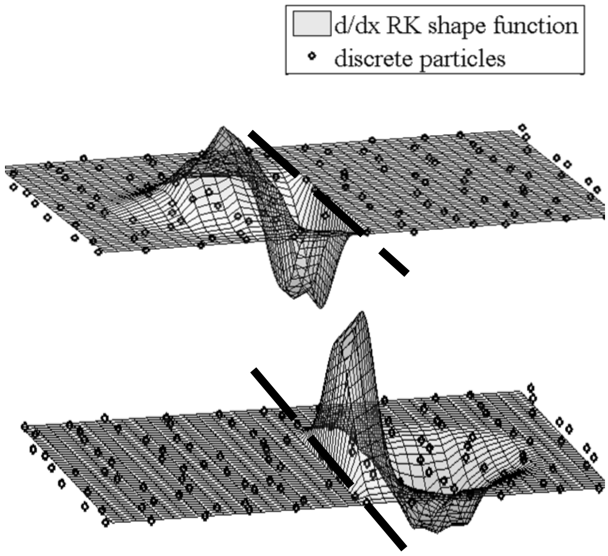

圖 3 正向與負向的形函數一階導數和離散點

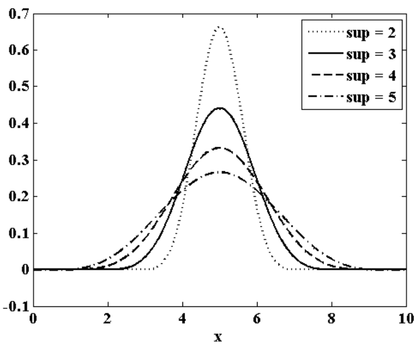

圖 4 不同影響域的一階 RK 形函數

3. 時間積分

本研究在空間近似部分使用的是二階 RKPM，時間近似的部分使用的是二階 Runge-Kutta 法[23]，將式(16)進行空間離散化後可表示為：

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_I^{n+1/2} &= \mathbf{U}_I^n + \Delta t \frac{\partial \mathbf{U}_I^n}{\partial t} \\ \mathbf{U}_I^{n+1} &= \frac{1}{2}\mathbf{U}_I^n + \frac{1}{2}\left(\mathbf{U}_I^{n+1/2} + \Delta t \frac{\partial \mathbf{U}_I^{n+1/2}}{\partial t} \right) \end{aligned} \tag{22}$$

其中上標 n 為第 n 個時間項，Δt 為時間增量。

數值算例

1. 開放渠道流過一圓丘

第一個數值算例為淺水波方程式眾所皆知的基本問題，在這個例子中，流體會通過兩種不同形狀的圓丘，這兩種底床都是無摩擦的。流道全長為 25 公尺且寬度為一單位，因此這是個一維問題。第一種底床形狀為：

$$Z_b = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x-10)^2 & \text{if } 12 \ge x \ge 8 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{23}$$

邊界條件為下游出流固定水深 2 公尺，上游入流固定流量為 $q = 4.42m^3/s$ 。底床的模型以及穩定狀態的水深如圖 5 所示：

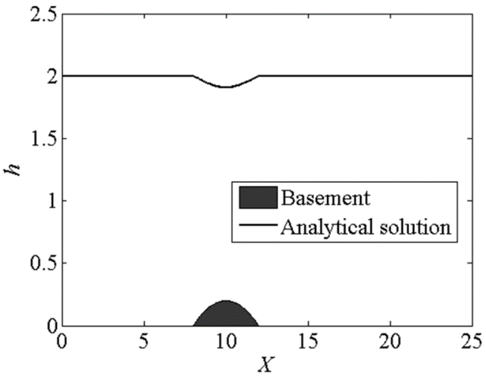

圖 5 第一種底床形狀以及穩態的開放流

為了評估收斂速度，使用均勻離散化的 126 個、251 個和 501 個的 RK 離散點，一階以及二階 RK 近似皆使用影響域 $a = 5\Delta x$，其中 Δx 為離散點距離，因為是均勻佈點，因此所有的 Δx 都是一樣的。為了確保得到的解是穩態的，總計算時間設定為 $T = 400$秒，時間步為 $\Delta t = 0.005$。一維問題的計算誤差皆使用均方根法做計算，定義如下所示：

$$e = \sqrt{\frac{1}{NP}\sum_{I}^{NP}\left(h - h^h\right)^2} \tag{24}$$

不同影響域和近似階數所得到的收斂測試結果(水深解)如圖 6 所示，一階近似和二階近似的收斂率分別為 1.122 和 1.030，在這個算例中，底床上的圓丘起始處和結束處會產生不連續點的跳躍，然而 RK 近似是高度平滑和連續的數值方法，因此即使使用高階 RK 形函數，在接近不連續區域時收斂速度也是有限的。

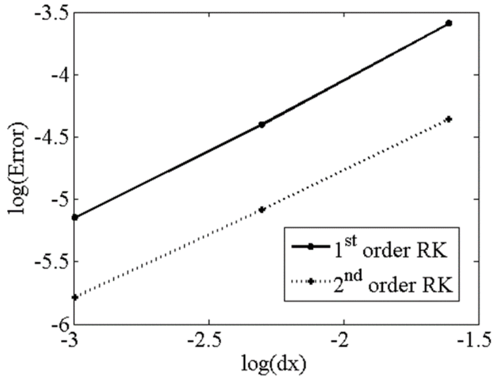

圖 6 126 點、251 點和 501 點之一階和二階 RK 近似之收斂性測試[25]

無網格法的優點之一便是它可以簡單地套用非均勻網格並且依然保持精度，在這裡我們重新以第一種底床形狀來分析非均勻離散化的開放流問題，總離散點數和均勻離散時相同，為 125 點、251 點和 501 點，但各離散點之間有隨機擾動 ε ，擾動值設定為 $|\varepsilon| \le 0.4\Delta x$ ，非均勻離散點的排列如圖 7 所示。

一般來說，使用非均勻離散時 RK 形函數會有不同的影響域大小，但因為同時使用了 Full Transformation Method，相同的影響域尺寸會比較方便也能維持相同精度。在本算例中，一階近似與二階近似使用的影響域大小皆為 $a = 5\Delta x$ ，均勻離散和非均勻離散情況(對於不同數量的離散點)之計算誤差如圖 8 所示。對於非均勻離散化，越高階的近似可以得到越好的精度，並且可以達到與均勻離散類似的精度水準。因此，本研究提出之方法能夠穩定地使用非均勻離散。

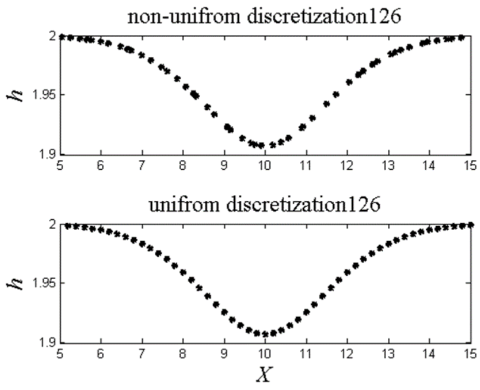

圖 7 均勻離散和非均勻離散 126 點之排列

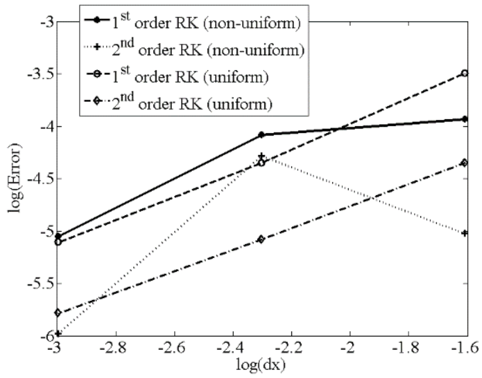

圖 8 一階和二階 RK 近似之均勻離散與非均勻離散收斂性測試[25]

開放流問題的第二種底床形狀為指數函數[16]：

$$Z_b = 0.2e^{-0.16(x-10)^2} \tag{25}$$

底床的模型以及相同邊界條件下的解析解如圖 9 所示。一階近似與二階近似使用影響域大小皆為 $a = 5\Delta x$，以分析結果水深之誤差來測試收斂率，使用離散點分別為 26、51、126、和 251 點的一階近似和二階近似之收斂率如圖 10 所示。

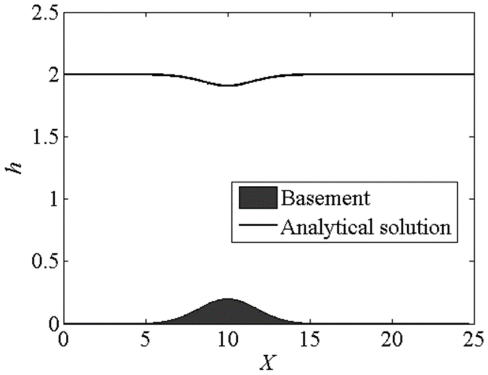

圖 9 第二種底床形狀與穩態的開放流

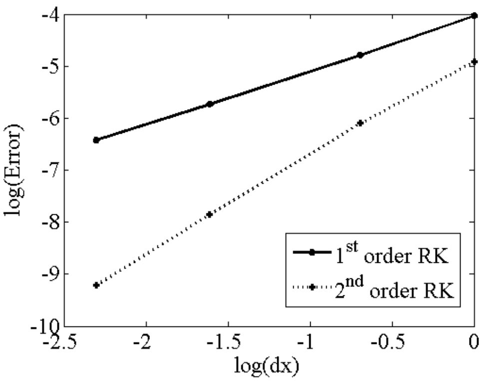

圖 10 26、51、126 和 251 離散點之一階和二階 RK 近似之收斂性測試[25]

一階近似和二階近似之收斂率分別為 1.04 和 1.87，與之前的情況 (開放流通過不連續之突起圓丘)不同，使用較高階的 RK 形函數獲得之數值結果能夠得到更好的精度和收斂速度。對於非均勻離散情況，離散點距離間的擾動設定為 $|\varepsilon| \le 0.5\Delta x$。均勻離散和非均勻離散的收斂性測試結果如圖 11 所示，其一階近似和二階近似使用之離散點數分別為 26、51、126 與 251 點。

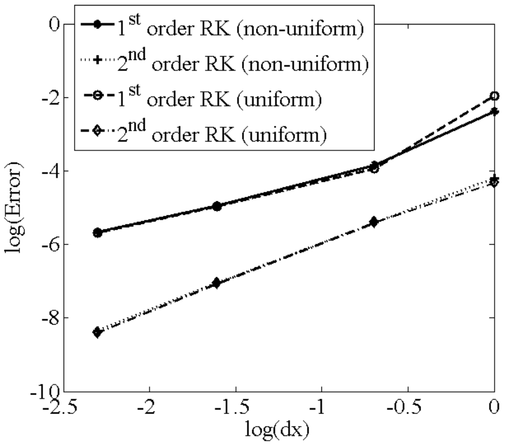

圖 11 一階和二階 RK 近似之均勻離散與非均勻離散收斂性測試[25]

如圖 11 所示，當底床幾何形狀連續時，非均勻離散模型與均勻離散模型的收斂速度完全相同。相反的，如圖 8 所示，不連續底床之非均勻離散模型收斂率與不連續區域周圍之離散點位置有高度相關。

2. 斜向水躍

本算例是個眾所皆知的二維水力問題[4]，開放流道長 40 公尺、寬 30 公尺。這個波傳問題中，流體會以 $\theta = 8.95^\circ$ 的傾角撞擊牆壁，並從受撞擊的牆壁開始，直到模型的出口產生一個角度為 $\beta = 30^\circ$ 的不連續衝擊波[15]。流道的頂部和底部為牆壁邊界，設定為平坦且無摩擦力；左邊和右端分別為入流和出流邊界。在本研究中，離散點總數為 1230 點與 4860 點，每個離散點之間的距離在入流處是相同的。這個例子的離散化模型如圖 12 所示。

流道之初始條件在入流和出流端皆為水深 $h = 1\text{m}$ 和速度 $u = 8.75\text{m/s}$、$v = 0$。達到穩態之收斂標準為 L2 norm：

$$e = \sqrt{\sum_I \left(h_I^{n+1} - h_I^n\right)^2} \tag{26}$$

當 $e < 10^{-5}$ 時即為達到穩態。水躍模擬的穩態結果如圖 13 所示，可以觀察到因為流道收縮而產生水位堆高的現象。

為了測試本方法之收斂性，分別以 1230 個點與

4860 個離散點來計算。水深等高線的數值解和解析解如圖 14 所示。從圖中可以看到本方法可以很好的描述水位堆高的現象，藉由增加離散點數，可以得到更好的精度。因此，本方法對於二維水力問題有很好的穩定性和可靠性。

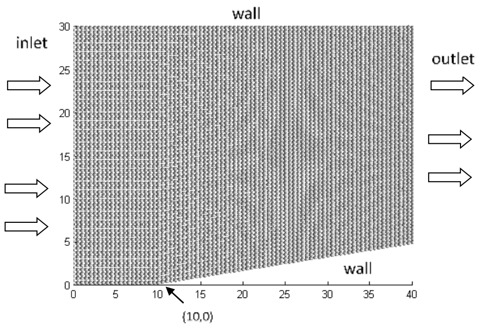

圖 12 斜向水躍模型

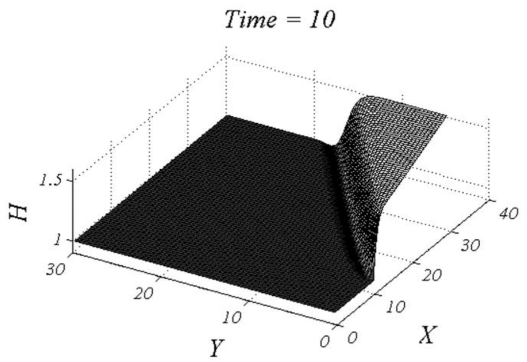

圖 13 斜向水躍在第 10 秒時的數值結果[25]

結論

本研究中，將無網格再生核質點法結合上游法和二階 Runge-Kutta 時間積分法，對幾種開放流問題和漸縮流斜向水躍問題進行建模和數值模擬，證明了所提出的方法具有高收斂性和高精度，此外，使用非均勻離散化的離散點時也保有同樣的精確度以及收斂性，並且發現即使解裡有不連續處，套用非均勻離散化會非常有效。因此，對於非均勻離散化的易用性是本研究方法優於其他數值方法的關鍵。

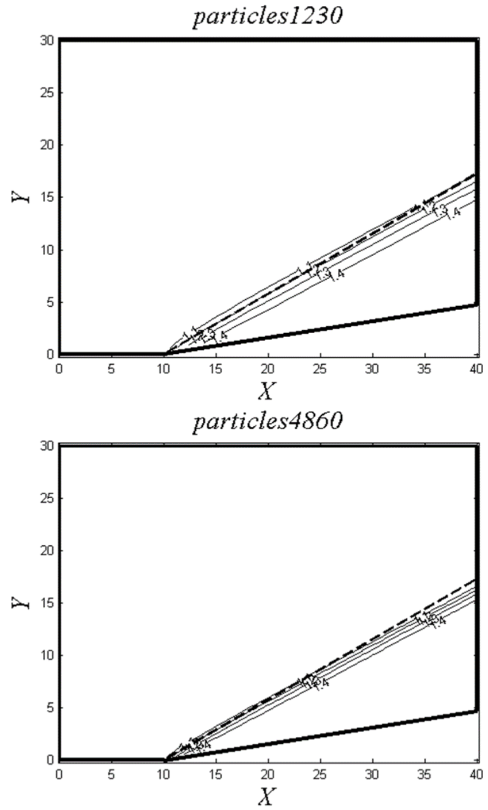

圖 14 1230 與 4860 點之水深等高線圖比較[25]

參考文獻

1. Fennema Robert J, Chaudhry MH. Explicit Methods for 2-D Transient Free Surface Flows. Journal of Hydraulic Engineering 1990;116(8): 1013-34.
2. Xing Y, Shu C-W. High order finite difference WENO schemes with the exact conservation property for the shallow water equations. J Comput Phys 2005;208(1): 206-27.
3. Xing Y, Shu C-W. High-order finite volume WENO schemes for the shallow water equations with dry states. Advances in Water Resources 2011;34(8): 1026-38.
4. Yoon Tae H, Kang S-K. Finite Volume Model for Two-Dimensional Shallow Water Flows on Unstructured Grids. Journal of Hydraulic Engineering 2004;130(7): 678-88.
5. Liang S-J, Tang J-H, Wu M-S. Solution of shallow-water equations using least-squares finite-element method. Acta Mechanica Sinica 2008;24(5): 523-32.
6. Young DL. Finite element modeling of shallow water wave equations. Journal of the Chinese Institute of Engineers 1991;14(2): 143-55.
7. Lucy LB. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. The Astronomical Journal 1977;82: 1013.
8. Gingold RA, Monaghan JJ. Smoothed particle hydrodynamics - Theory and application to non-spherical stars. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 1977;181: 375-89.

9. Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. Computational Mechanics 1992;10(5): 307-18.
10. Belytschko T, Lu YY, Gu L. Element-free Galerkin methods. Int J Numer Methods Eng 1994;37(2): 229-56.
11. Liu WK, Jun S, Zhang YF. REPRODUCING KERNEL PARTICLE METHODS. Int J Numer Methods Fluids 1995;20(8-9): 1081-106.
12. Chen JS, Pan CH, Wu CT, Liu WK. Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of non-linear structures. Comput Meth Appl Mech Eng 1996;139(1-4): 195-227.
13. Ata R, Soulaïmani A. A stabilized SPH method for inviscid shallow water flows. Int J Numer Methods Fluids 2005;47(2): 139-59.
14. Vacondio R, Rogers BD, Stansby PK, Mignosa P. A correction for balancing discontinuous bed slopes in two-dimensional smoothed particle hydrodynamics shallow water modeling. Int J Numer Methods Fluids 2013;71(7): 850-72.
15. Buachart C, Kanok-Nukulchai W, Ortega E, Onate E. A Shallow Water Model by Finite Point Method. Int J Comput Methods 2014;11(1): 1350047.
16. Chou CK, Sun CP, Young DL, Sladek J, Sladek V. Extrapolated local radial basis function collocation method for shallow water problems. Engineering Analysis with Boundary Elements 2015;50: 275-90.
17. Darbani M, Ouahsine A, Villon P, Naceur H, Smaoui H. Meshless method for shallow water equations with free surface flow. Applied Mathematics and Computation 2011;217(11): 5113-24.
18. Du C. An element-free Galerkin method for simulation of stationary two-dimensional shallow water flows in rivers. Comput Meth Appl Mech Eng 2000;182(1): 89-107.
19. Guan P-C, Sun C-T. The Isoparametric Reproducing Kernel Particle Method for nonlinear deformation of plates. Engineering Analysis with Boundary Elements 2014;42(0): 67-76.
20. Krongauz Y, Belytschko T. Consistent pseudo-derivatives in meshless methods. Comput Meth Appl Mech Eng 1997;146(3): 371-86.
21. Li P-W, Fan C-M. Generalized finite difference method for two-dimensional shallow water equations. Engineering Analysis with Boundary Elements 2017;80(Supplement C): 58-71.
22. Chen JS, Wang HP. New boundary condition treatments in meshfree computation of contact problems. Comput Meth Appl Mech Eng 2000;187(3-4): 441-68.
23. Gottlieb S, Shu C-W. Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes1996.
24. Sun CP, Young DL, Shen LH, Chen TF, Hsian CC. Application of localized meshless methods to 2D shallow water equation problems. Engineering Analysis with Boundary Elements 2013;37(11): 1339-50
25. Chien-Ting Sun, On-Lei Annie Kwok, Pai-Chen Guan, Wen-Kai Shih. Using Reproducing Kernel Particle Method for Shallow Water Equations. Journal of Mechanical Science and Technology in process, 2018.